$4^{ème}$ **Sc-Exp**

Série N°:2

(Limite Continuité)

1/ Soit P(x) un polynôme alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\text{monome de plus haut degré})$.

2/ Soit P et Q deux polynômes alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\text{monome de plus haut degré de P}}{\text{monome de plus haut degré de Q}}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

EXERCICE N°1 :

Calculer les limites suivantes

❶ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2+4x-5}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt{x^2+7} - x$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+3x+1} - x$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+3x+1} - x + 2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2-4x+24}{x-2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-6x^2-4x+24}{3x^3-2x+8}$

❷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} x\sin(\dfrac{1}{x})$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \cos(\dfrac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1})$

EXERCICE N°2 :

I/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2-9x+27}{x-3}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 3. Donner alors ce prolongement..

II/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

1/ Déterminer la limite de f en 2, conclure.

2/ La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

EXERCICE N°3 :

Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est vraie.

Soit g et u deux fonctions donnés par :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$u(x)$	-5	↗	2	↘	-1	↗	2

1/ L'équation g(x) = 1 admet une seule solution dans :

▪]-∞,-1[$\qquad$ ▪]-1,+∞[$\qquad$ ▪]-∞,2[

2/ On a : ▪ $g\circ u(2) = -1$ $\qquad$ ▪ $g\circ u(-1) = 2$ $\qquad$ ▪ $g\circ u(-1) = 3$

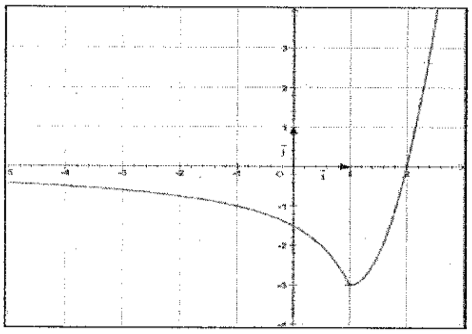
3/ On a : ▪ $\lim\limits_{x\to +\infty} g\circ u(x) = 2$ $\qquad$ ▪ $\lim\limits_{x\to +\infty} g\circ u(x) = 3$ $\qquad$ ▪ $\lim\limits_{x\to +\infty} g\circ u(x) = -1$

EXERCICE N°4 :

Q-C-M :

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR. On note que ζ_f admet :

- Au voisinage de (-∞) une asymptote horizontale d'équation y = 0 .
- Au voisinage de (+∞ une branche parabolique de direction l'axe $(o, \vec{j})$.



Pour chaque question indiquer la ou les réponses exactes.

1/ Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, On a ; f(x) ≤ h(x). On a alors :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

2/ Soit g=1/f.

- g est définie sur IR^* ▪ g est définie sur IR\{2} ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ▪ ζ_g admet une asymptote verticale.

3/ Soit k la fonction définie sur IR^* par $k(x) = \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$, on a alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ k(x) = -3$ ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} k\circ f(x) = 1$ ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ k(x) = -3$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f\circ k(x) = +\infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to0^-} f\circ k(x) = -\infty$

EXERCICE N°5 :

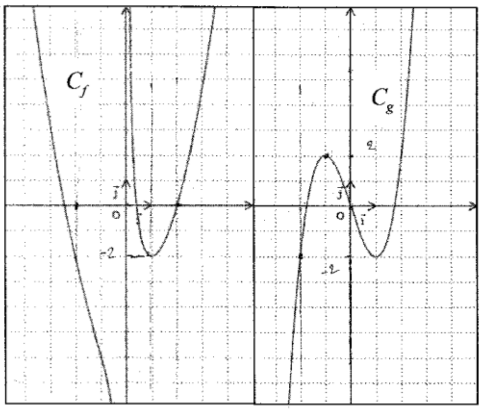
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ sont tracée les courbes ζ_f et ζ_g .

L'axe des ordonnées est une asymptote à ζ_f .

Déterminer en justifiant :

1/ $g\circ f([1,2])$ et $f\circ g(]-\infty,-2])$.

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f\circ g(x)$.



EXERCICE N°6 :

Déterminer $D_{f\circ g}, D_{g\circ f}, f\circ g(x)$ et $g\circ f(x)$.

1/ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

2/ $f(x) = x^2+2x+1$ et $g(x) = \sqrt{1-x} - 1$